

A. Khintchine の定理に関する数値計算

— Some Computations related to a Theorem of A.Khintchine —

梅 田 芳 郎

Yoshio Umeda

名古屋市立大学 自然科学研究教育センター

Institute of Natural Sciences, Nagoya City University, Mizuho-ku, Nagoya 467. Japan

Abstract

We have computed the geometric means $M_n(\pi) = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ of the first n partial quotients of the number π for n 's ranging from 400 to 900 and considered the behavior of $\{M_n(\pi)\}$ as $n \rightarrow \infty$.

円周率 π の連分数展開から部分商の相乗平均 $M_n(\pi) = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ の値を $400 \leq n \leq 900$ の範囲で求めて、 $n \rightarrow \infty$ のときの $M_n(\pi)$ の挙動を調べた。

キーワード (Key words) : 連分数 部分商
continued fraction partial fraction

[I] 前書き (Introduction)

かつて名古屋市立大学教養部紀要 (末尾文献 4) を参照) において小島誠先生が π の連分数の第 n 部分商と近似分数を $n=1$ から始めて約 67900 個算出された。その後、岡野節氏から小島先生の計算プログラムに部分商の相乗平均算出のプログラムを付加して π が「(A. Khintchine) ほとんどすべての実数 t ($0 < t < 1$) の連分数展開で部分商の相乗平均 $M_n(t)$ は $n \rightarrow \infty$ のとき t に無関係な定数 $*$) に収束する」(1, p.160 および 5)) の「ほとんど」の実数の一つかどうか調べられるかも知れないときいた。橋本佳明氏が付加するプログラムをつくり、文献 4) の任意多倍長の計算をやってくださり、 $n=400$ から $n=900$ まで 10 刻みで $M_n(\pi)$ を求めることができた。 $(\pi$ の小数部分は 6) で求めた 2000 桁では不足であり 2300 桁を用いた。)

$*$) J. W. Wrench, Jr., Math. Comp. 14 (1960) によれば、その値は 2.68545 ...。

[II] 結果 (Results)

n	$M_n(\pi) - 2$	n	$M_n(\pi) - 2$
400	.55248		
410	.54969	660	.59187
420	.58944	670	.62047
430	.59630	680	.62135
440	.61725	690	.62240
450	.63043	700	.63433
460	.62553	710	.63714
470	.63183	720	.63980
480	.62568	730	.64553
490	.63395	740	.64190
500	.63741	750	.64297
510	.65113	760	.64547
520	.63980	770	.63292
530	.61588	780	.63763
540	.61929	790	.65162
550	.60703	800	.65181
560	.57739	810	.65495
570	.55803	820	.65444
580	.57137	830	.68147

590	.55229	840	.66880
600	.56713	850	.66714
610	.58594	860	.68724
620	.57786	870	.69361
630	.58905	880	.71198
640	.60235	890	.72314
650	.59040	900	.73583

今回求めた数値は P. Pedersen 2)、G. Lochs 3) がそれぞれ部分的に小数第 4 桁または第 3 桁まで与えている数値と一致している。

この表により $M_n(\pi)$ は Khintchine の定数へ収束するらしく見えるが、もしそうであっても非常に緩慢なようである。収束の確証を得るためにはより多くの数値が必要である。

[Ⅲ] 謝 辞

この小文は前書きにおいてのべた課題に対する試算の

報告です。課題は平成元年・同四年文部省科学研究費補助の研究につながりを持ちます。著者の都合によりこの段階で原稿の受理を編集委員に認めていただきました。ご迷惑をおかけしたことをおわび致します。

参考文献

- 1) A. M. Rockett and P. Szuesz, Continued Fractions World Scientific (1992)
- 2) P. Pedersen, Nordisk Mat. Tidskr. 7, 165(1959)
- 3) G. Lochs, Monatsh. Math. 67, 311(1963)
- 4) M. Kojima, Bull. Gen. Educ. Nagoya C.U., 31, 1 (1985)
- 5) T. Okano, Bull. Gen. Educ. Nagoya C.U., 38, 13 (1992)
- 6) Y. Hashimoto and Y. Umeda, Bull. Gen. Educ. Nagoya C.U., 40, 7 (1994)

Received December 13, 1996